К математической модели движения стандартного вездехода

Мясников Евгений Анатольевич
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин, Хабаровский институт инфокоммуникаций (Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики), eugenemcvs@mail.ru

Предложен способ расчёта вероятности передвижения экологичного четырёхколёсного вездехода по лесной местности, основанный на авторском алгоритме решения задачи о непрерывной серии успехов в схеме Бернулли. Метод позволяет учесть высокую манёвренность вездехода и повысить оценку вероятности движения в густом лесу за счёт выбора траектории, ранее ограниченного тремя направлениями. Как средство расчёта вероятности передвижения представлен поиск соотношения доступной площади и площади, необходимой для перемещения. Это сможет улучшить результаты, полученные ранее при существенных ограничениях. Способ решения задачи позволит найти зависимость проходимости от характеристик местности и параметров вездехода. Указаны границы применимости метода.
Ключевые слова: экологичный вездеход, лёгкий вездеход, ширина колеи, плотность деревьев, вероятность, проходимость, серия испытаний Бернулли.

Введение

Серьёзное ухудшение состояния дальневосточных и северных лесов, где ресурсы восстанавливаются особенно сложно, подняло вопрос о других способах их использования, помимо обычных лесозаготовок [2]. Многие авторы [2 и источники] считают, что сбор дикоросов, мёда, берёзового сока, экологический туризм способны дать экономический эффект, превышающий доходы от заготовки древесины. Однако для этого нужны принципиально новые лёгкие экологичные вездеходы, сохраняющие как травяной покров и почву, так и деревья и кустарники [2, с.17-23], но способные при этом двигаться в условиях полного бездорожья.

Экологичный вездеход должен отличаться небольшими размерами, но это снижает грузоподъёмность и устойчивость. Вездеход должен перевозить пассажиров, грузы и лесные продукты, и при этом быть безопасным и в плане движения, и в плане экологии.

Основное противоречие здесь связано с шириной вездехода, и ещё в [1] поставлена математическая задача о влиянии ширины колеи на вероятность перемещения вездехода без столкновения с деревьями. В [1] же предложено решение, развитое затем в [3, с. 47-53] и [4, с. 36-41], где рассмотрена задача о выборе ширины колеи по общей проходимости – вероятности передвижения на сколь угодно большое расстояние.

Недостаток предлагавшихся решений – ограничение на манёвренность, когда движение из каждой точки предлагалось или прямо, или с поворотом на фиксированный угол. Это, как указано в [5, с. 61], сильно занижает результаты. Ограничение вызвано невозможностью найти по какой-либо формуле вероятность непрерывной серии успехов в схеме Бернулли.

Предложенный автором в [9, с. 19-25] алгоритм поиска вероятности серии успехов позволил в [8, с. 63-70] и [10] найти способ решения, учитывающий высокую манёвренность вездехода. В [7, 8, 10] изучалось движение треугольного вездехода, близкого к мотоциклу с коляской.

В данной статье рассматривается движение прямоугольного вездехода, близкого к четырёхколёсному вездеходу или квадроциклу. Найдены площади, доступные и необходимые для манёвра, что в дальнейшем позволит найти зависимость проходимости от ширины колеи и плотности деревьев.

Материалы и методы

Задача. Даны b – ширина колеи вездехода, *м*; a – длина вездехода, *м*; ρ – плотность деревьев на участке, *ед/м*^{2}; d – средняя толщина деревьев, l – шаг (расстояние, которое необходимо преодолеть), *м.*

Новый параметр $\alpha_{\max}$, *рад* – предельный поворот передних колёс.

Надо найти $S_{ср}$ – среднюю площадь, необходимую вездеходу для поворота в пределах $\alpha_{\max}$, и $S_{ост}$ – общую площадь, доступную вездеходу при таком $\alpha_{\max}$ (площадь, где может оказаться хотя бы одна точка вездехода).

Представим вездеход в виде прямоугольника, в каждой вершине которого находится центр одного из колёс. Поворот вездехода происходит за счёт поворота передних колес. Центр поворота находится на пересечении двух осей, одна из которых проходит через заднюю ось, а другая перпендикулярна переднему колесу на противоположной от поворота стороне (Рисунок 1).

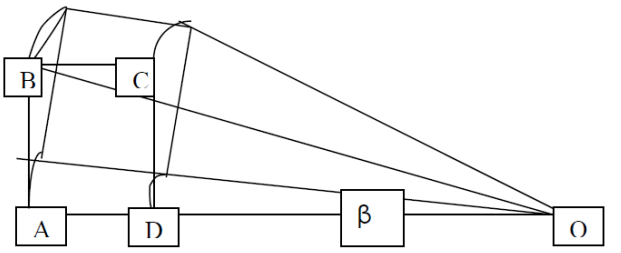


Рис. 1. Поворот прямоугольного вездехода

Точки вездехода движутся по дугам с общим центром в O, а под перемещением на l понимаем движение середины задней оси по дуге длины l.
На каждом шаге вездеход может повернуть переднее колесо на угол $\alpha \in [-\alpha_{\max}; +\alpha_{\max}]$ от текущего направления. При $\alpha = 0$ движение пойдёт прямо.

Задача для прямоугольного вездехода в сравнении с задачей для треугольного отличается более сложным вычислением площадей.
Пусть вездеход повернул левое переднее колесо на угол α и прошёл расстояние l. Обозначим $\angle AOB = \alpha,\ \angle AOA' = \beta$, где $l = \beta(\operatorname{actg}\alpha - 0{,}5b)$. Новые положения точек обозначены штрихом (на Рисунке 1 не отмечены).
Для поворота нужна свободная площадь $S_2 = S(BB`C`D`+AA`D`D)$:
$S(BB'C'D'+AA'D'D) = S(OABB'C') - (S(ABCD) + S(ODD') + S(OC'D'))$.

Заметив, что

$$S(OABB`C`) = S(OAB) + S(BOB`) + S(OB`C`),$$

получим

$$S_2 = S(OAB) + S(BOB`) + S(OBC) - S(ABCD) - S(ODD`) - S(OCD).$$

Поскольку

$$OAB + OBC = ABCD + OCD,$$

остаётся комбинация площадей секторов

$$S_2 = S(BOB`) - S(ODD`) = \frac{\beta}{2}\left(OB^2 - OD^2\right).$$

Учитывая, что $OB = a\sec\alpha$ и $OD = a\operatorname{ctg}\alpha - b$, находим

$$S_2 = \frac{\beta}{2}a^2\left(\sec^2\alpha - \left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{b}{a}\right)^2\right) = \frac{\beta}{2}a^2\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 2\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{b^2}{a^2}\right),$$

или, что равносильно,

$$S_2 = \frac{\beta}{2}a^2 + b\beta a\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\beta}{2}b^2 = \frac{\beta}{2}a^2 + \beta b\left(a\operatorname{ctg}\alpha - \frac{b}{2}\right) = \frac{\beta}{2}a^2 + bl.$$

С учётом толщины деревьев добавится слагаемое dl:

$$S_2 = \frac{a^2}{2}\beta + (b+d)l.$$

Эта площадь, как можно заметить, складывается из площади

$$S_{пов} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{l}{a\operatorname{ctg}\alpha - 0{,}5b},$$

необходимой для поворота оси симметрии вездехода на угол β, и площади $(b+d)l$, необходимой для прямого сдвига на один шаг.

Угол поворота переднего колеса распределён практически равномерно на отрезке $[-\alpha_{\max};\alpha_{\max}]$. Модуль угла тоже распределён равномерно на $[0;\alpha_{\max}]$. Но площадь из-за резкого возрастания при больших углах уже нельзя считать равномерно распределённой на участке от 0 до $S_{пов}(\alpha_{\max})$. Среднее значение площади, необходимой для поворота, можно найти как

$$S_{ср}(\alpha_{\max}) = \frac{1}{\alpha_{\max}}\frac{a^2 l}{2}\int_0^{\alpha_{\max}}\frac{d\alpha}{a\operatorname{ctg}\alpha - 0{,}5b}.$$

Тригонометрическая подстановка $\operatorname{ctg}\alpha = t$ приводит к интегралу

$$\frac{al}{2\alpha_{\max}}\cdot\int_{\operatorname{ctg}\alpha_{\max}}^{+\infty}\frac{dt}{(t-k)(t^2+1)},$$

где $k = 0{,}5b/a$. Для треугольного вездехода такой же длины и ширины $k = \operatorname{ctg}\gamma$, где γ – угол при основании. На Рисунке 1 это $\angle AFB$, где F – середина AD.

Вычисление интеграла трудностей не представляет. Разложив

$$\frac{1}{(t-k)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t-k}$$

и определив методом неопределённых коэффициентов, что

$$A = -\frac{1}{k^2+1}, \qquad B = -\frac{k}{k^2+1}, \qquad C = \frac{1}{k^2+1},$$

находим, что

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)(t-k)} = -\frac{1}{2(k^2+1)}\ln(t^2+1) + \frac{k}{k^2+1}\operatorname{arcctg}t + \frac{1}{k^2+1}\ln|t-k|,$$

а это равносильно

$$\frac{1}{k^2+1}\left(k\operatorname{arcctg}t + \ln\left|\frac{t-k}{\sqrt{t^2+1}}\right|\right).$$

При подстановке нижнего предела $t = \operatorname{ctg}\alpha_{\max}$ получаем

$$F_1 = \frac{1}{k^2+1}\ln\left|\frac{\operatorname{ctg}\alpha_{\max} - k}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha_{\max}+1}}\right| + \frac{k}{k^2+1}\alpha_{\max},$$

что с учётом равенства $\operatorname{ctg}^2\alpha_{\max} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha_{\max}}$ можно упростить до

$$F_1 = \frac{1}{k^2+1}\ln|\cos\alpha_{\max} - k\sin\alpha_{\max}| + \frac{k}{k^2+1}\alpha_{\max} < 0.$$

Для верхнего предела $t \to +\infty$ существуют пределы каждого слагаемого:

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arcctg}t = 0 \quad\text{и}\quad \lim_{t\to+\infty}\ln\left|\frac{t-k}{\sqrt{t^2+1}}\right| = \ln 1 = 0,$$

поэтому вся первообразная при $t \to +\infty$ стремится к 0.

Всё среднее значение площади, необходимой для сдвига с поворотом:

$$S_{ср} = (b+d)l - \frac{al}{2\alpha_{\max}(k^2+1)}\left(\ln|\cos\alpha_{\max} - k\sin\alpha_{\max}| + k\alpha_{\max}\right),$$

или

$$S_{ср} = (b+d)l - \frac{al}{2(k^2+1)}\left(\frac{1}{\alpha_{\max}}\ln|\cos\alpha_{\max} - k\sin\alpha_{\max}| + k\right).$$

Формула теряет смысл при $\cos\alpha_{\max} = k\sin\alpha_{\max}$, т.е. при $\alpha_{\max} = \gamma$. Но при повороте на такой угол $(60-70°)$ центр вращения совпадёт с центром задней оси. Теоретически вездеход станет вращаться вокруг середины основания при неизменном $l = 0$, на практике из-за трения не сдвинется с места.

Теперь найдём всю площадь, доступную прямоугольному вездеходу в пределах возможного поворота передних колёс. Она выглядит сложнее, чем доступная треугольному, из-за необходимости учитывать области, заметаемые хотя бы одним из передних колёс. На Рисунках 2 и 3 показаны предельные точки, занимаемые левым (рис.2) и правым (рис.3) передними колёсами при повороте вездехода вправо при углах от 0 до 64°.

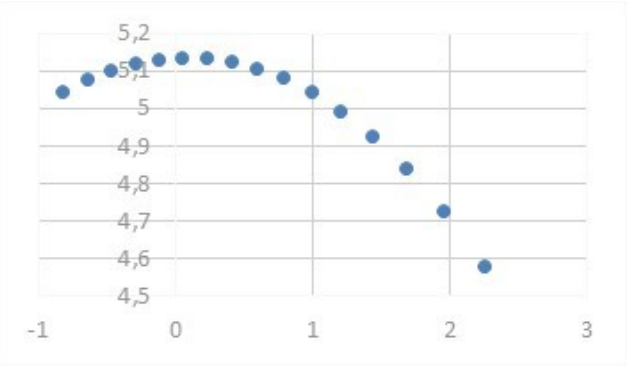


Рис. 2. Движение левого переднего колеса вправо

Длина вездехода – 3 м, ширина – 2 м, перемещение середины основания – 2 м. Начало координат системы – середина задней оси.

Левое колесо достигло наибольшей ординаты, правое – наибольшей абсциссы. Точки, соответствующие одному углу, соединяются одним и тем же отрезком – поворачивающейся передней осью.

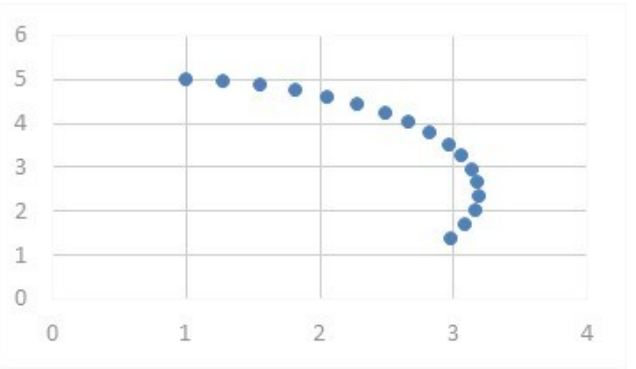


Рис. 3. Движение правого переднего колеса вправо

Необычное поведение правого колеса на рисунках вызвано тем, что небольшое перемещение при большом угле фактически означает поворот вокруг какой-то точки рядом с вездеходом или даже внутри него.

При движении с поворотом влево картина полностью симметрична.

Доступная площадь при поворотах вправо – PABCEG на Рисунке 4.

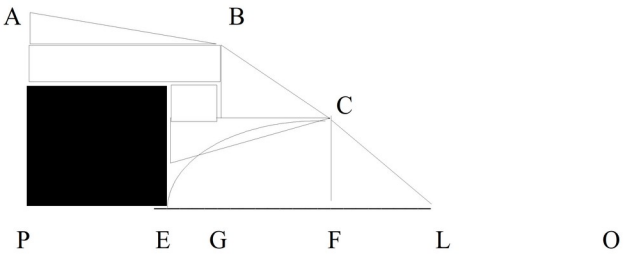


Рис. 4. Площадь, доступная прямоугольному вездеходу

Точка A соответствует левому переднему колесу при перемещении прямо, точка B – ему же при перемещении с максимальным поворотом. Точка C – правое переднее колесо при максимальном повороте. Точка E – правое заднее колесо. Точка G – проекция B и не относится к вездеходу. Текущее положение вездехода выделено чёрным. Длина перемещения отражается на длине части ниже точки E, но общая схема сохраняется.

Поиск координат точек в системе, связанной с центром поворота O, сложен. Он интересен скорее как математическая задача. Приведём готовые результаты. Обозначив γ – угол, образованный левым передним колесом, центром поворота и задней осью (AOB, рис.1), β – угол, необходимый для проезда по дуге длины l, а также для краткости $\alpha = \alpha_{\max}$, получим, что

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{a + b\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \beta = \frac{l\operatorname{tg}\alpha}{a + 0{,}5b\operatorname{tg}\alpha},$$

$$A_x = b + a\operatorname{ctg}\alpha, \qquad A_y = a + l$$

$$B_x = \frac{a\cos(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}, \qquad B_y = \frac{a\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma},$$

$$C_x = \frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}, \qquad C_y = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha},$$

Координаты позволяют найти площадь фигуры

$$S = S(PABF) + S(FBCL) + S(LCE) - S(COE),$$

где площади двух криволинейных трапеций можно оценить как

$$S(PABF) = 0{,}5(A_y + B_y)(B_x - A_x), \qquad S(FBCE) = 0{,}5(B_y + C_y)(C_x - B_x),$$

площадь треугольника

$$S(CLO) = 0{,}5C_xC_y,$$

площадь сектора

$$S(COE) = 0{,}5(\alpha+\beta)a^2\ \mathrm{ctg}^2\alpha.$$

Такая же фигура получается при повороте влево. Общая часть фигур имеет основание, совпадающее с основанием вездехода. Её площадь в силу небольшого изменения ординат на рис. 4 можно оценить как

$$S_c = (a+l)b$$

и вычесть из удвоенной площади правого поворота.

После упрощений получаем итоговую доступную площадь

$$S = a(a+l)\left(\mathrm{ctg}\,\alpha_{\max} - \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}\right) + B_y(A_x - C_x) + B_xC_y - a^2(\alpha_{\max}+\beta)\mathrm{ctg}^2\alpha_{\max},$$

слабо заниженную из-за спрямления трапеций и переоценки общей части.

Результаты и обсуждение

Найдены обе площади, необходимые для расчёта проходимости методом, предложенным в [7, 8, 10]. На их основе задача сводится к задаче о серии успехов в схеме Бернулли по алгоритму, обоснованному в [9].

Например, у вездехода длиной 2,5м с поворотом переднего колеса $45°$ при изменении ширины от 0,8 м до 3 м доступная площадь меняется от 6,5 до 13,2, средняя необходимая от 1,6 до 4,12 $м^2$, а их отношение – от 4,05 до 3,2. При ширине 0,8 м соотношение $6{,}5/1{,}6 \approx 6{,}4/1{,}6 = 4$. Разделим 6,4 $м^2$ на 20 участков площади 0,32 $м^2$. При плотности деревьев 0,5 и толщине 20 см вероятность отсутствия центров деревьев на участке $P_{\omega}(0) = e^{-0{,}32\cdot0{,}5} \approx 0{,}852$. Тогда 1,6 $м^2$ разделится на 5 участков. Вероятность наступления 5 событий подряд в 20 испытаниях [9] при $p_0 = 0{,}852$ равна $P_{20}(K \ge 5) = 0{,}9989$.

При такой вероятности шага корень уравнения проходимости [1, 8]

$$1 - P_* = (1 - 0{,}9989P_*)^4$$

неотличим от 1. При плотности 1 $ед/м^2$ $P_{\omega}(0) = e^{-0{,}32\cdot1} \approx 0{,}726$, тогда $P_{20}(K \ge 5) = 0{,}979$, и P_* отличается от 1 на $8\cdot10^{-5}$.

Подробное изучение влияния параметров вездехода и характеристик местности на прохолимость, сравнение с результатами ранних исследований, подбор ширины колеи по требуемой проходимости – задачи для новой статьи.

Кроме того, желательно найти более простые формулы для вычисления средней и необходимой площади за счёт обнаружения факторов и элементов, второстепенных для решения.

Заключение

Отказ от выбора «прямо или с предельным поворотом» повышает оценку проходимости, но требует решения более сложных математических задач – и в планиметрии, и в теории вероятности. Результат оправдывает возникшие сложности, поскольку показывает возможность применения вполне грузоподъёмных и устойчивых вездеходов без вреда для экологии.

Метод сравнения площадей повышает число вариантов движения из каждой точки, а это делает возможным перемещение на большое расстояние. Одновременно возрастает степень уравнения проходимости [1, 8], что увеличивает его корень до значений, неотличимых от 1.

Литература

1. Александров А. В., Иванов Н. А., Мясников Е. А. Оценка проходимости вездехода по лесистой местности // Научное обеспечение технического и социального развития ДВ региона. – Хабаровск: Издательство ХГТУ, 2003.
2. Иванов Н. А., Лейбович А. В. Основы теории лёгких колёсных вездеходов / Н. А. Иванов. Владивосток: Дальнаука, 2010. 256 с.
3. Иванов Н.А., Мясников Е.А. Оценка проходимости трёхколесного вездехода по лесистой местности // «Лесной журнал», 2005, №5, с 45-53.
4. Иванов Н.А., Мясников Е.А. Оценка вероятности преодоления вездеходом лесистой местности // Известия ВУЗов, «Лесной журнал», 2006, №3, с 36-41.
5. Иванов Н.А., Мясников Е.А. Состояние исследований проходимости транспортно-технологических машин и обоснование критерия оценки профильной проходимости // «Учёные заметки ТОГУ», №1(12), 2021, С 58-61.
6. Иванов Н.А., Мясников Е.А., Погребняк М.С. Профильная проходимость транспортно-технологических машин под пологом леса // Электронное издание «Учёные заметки ТОГУ». 2021. №1(12). С 62-66.
7. Мясников Е.А. О вероятности передвижения лёгкого вездехода под пологом леса // Экономика строительства. Научный, производственно-экономический журнал. М., 2026. №1, С. 351-354.
8. Мясников Е.А. К расчёту проходимости лёгкого вездехода в лесистой местности. // Инновационные подходы в современной науке: сб.ст. по материалам CXCVI Международной научно-практической конференции. М.: Интернаука, 2025. № 16(196). С. 61-75.
9. Мясников Е.А. О рекурсивном алгоритме решения одного класса прикладных задач // Химия, физика, биология, математика: теоретические и прикладные исследования: сб.ст. по материалам С Международной научно-практической конференции. М.: Интернаука. 2025. № 9(76). С. 17-29.
10. Мясников Е.А. Расчёт проходимости лёгкого вездехода в лесистой местности // Нефть и газ: Опыт и инновации. Научно-практический печатный журнал. Краснодар, 2025. №2 (Т9).

A mathematical model of movement of standard vehicle

Myasnikov E.A.

Khabarovsk Institute of Information Communications (Siberian State University of Telecommunication and Informatics)

JEL classification: C10, C50, C60, C61, C80, C87, C90

We propose a new method of calculation of a cross-country ability of a usual light four-wheeled ecological all-terrain vehicle in a wooded area. Method is based on author's alghoritm of the solving of a task about a continue series of successes in the Bernulli scheme. This method permits to take into account a high shunt ability of vehicle and to improve an estimate of the possibility of a movement in hard conditions owing to rich choice of directions (this choice was restricted in preceeding works only by three possibilities). It can improve results which was received earlier with sufficient restrictions. We may consider a relation of cross-country ability from movement conditions and vehicle parameters, especially from the rut width. The boundaries of application of method are given.

Keywords: ecological vehicle, light all-terrain vehicle, rut width, tree density, probability, cross-country ability, Bernullli test series.

References

1. Alexandrov A.V, Ivanov N.A., Myasnikov E.A. An Estimate of Cross-Ability of Vehicle In a Wooded Area // Scientific Maintenance of Technical and Social

Development of Far East. – Khabarovsk: KhSTU Publishing House. 2003.
2. Ivanov N.A., Leibovich A.V. The Principles of Theory of Light Wheeled All-Terrain Vehicles / Vladivostok. Dal'nauka Publishing House, 2010. 256 p.
3. Ivanov N.A., Myasnikov E.A. An Estimate of Cross-Country Ability of Three-Wheeled Vehicle in a Wooded Area // Forest Magazine, 2005. No.5, pp. 45-53.
4. Ivanov N.A., Myasnikov E.A. An Estimate of Overcoming Of a Wooded Area by Vehicle // Forest Magazine, 2006. No.3, pp. 36-41
5. Ivanov N.A., Myasnikov E.A. State of the Problem of the Study the Patency of the Transport and Technological Machines and the Justification of the Criterion Profile Patency // /El.Iss. "Sci. Topics of PSU". 2021 №1(12), pp 58-61.
6. Ivanov N.A., Myasnikov E.A, Pogrebnyak M.S. Profile Patency of Transport and Technological Machines Under the Wood Curtain // Electronic Iss. "Science Topics of PSU". 2021 №1(12), pp 62-66.
7. Myasnikov E.A. About a movement of light vehicle in wooded area // Economic of building. Science and practical magazine. Moscow, 2026. №1.
8. Myasnikov E.A. About a Calculation of Cross-Country Ability of Light All-Terrain Vehicle In Wooded Area // Innovation methods in modern science: collection of scientific articles of CXCVI International Science-Practical conference. Moscow, Internauka Issues. 2025. 16(196)
9. Myasnikov E.A. About Recursive Algorithm for One Class of Applied Problems // Khemistry, Physics, Biology, Mathematics: theoretical and applied investigations: collection of scientific articles of C International Science-Practical conference. Moscow, Internauka Issues. 2025. 9(76)
10. Myasnikov E.A. A Calculation of Cross-Ability of a Light Vehicle in the Wooded Area // Oil and Gas: Practice and Innovations. Science-practical printed magasine. Krasnodar, 2025. № 2(T9).