Определение нормальных напряжений в балках при чистом изгибе: сравнение формулы Навье и метода конечных элементов

Алферов Иван Валерьевич
к.т.н., доцент, Заведующий кафедрой «Строительная механика», Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ),

Эйдук Антон Борисович
студент, Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)

В работе проводится сравнительный анализ определения нормальных напряжений в балках при чистом изгибе аналитическим методом (формула Навье) и методом конечных элементов (МКЭ). Исследование выполнено на примере статически определимых балок (шарнирно-опертая и консольная) прямоугольного поперечного сечения. Особое внимание уделено оценке влияния краевых эффектов в зонах опорных закреплений и приложения нагрузок на точность инженерных расчетов.

Ключевые слова: сопротивление материалов, чистый изгиб, формула Навье, метод конечных элементов (МКЭ), нормальные напряжения, краевые эффекты.

Классические аналитические методы сопротивления материалов базируются на ряде упрощающих гипотез (гипотеза плоских сечений Бернулли, пренебрежение влиянием поперечных сил на нормальные напряжения и др.) [1, 2]. Эти допущения обеспечивают высокую точность расчёта напряжённо-деформированного состояния (НДС) стержневых элементов в зонах, удалённых от точек приложения сосредоточенных нагрузок и опорных закреплений. Однако вблизи зон концентрации нагрузок наблюдается существенная неравномерность распределения напряжений, обусловленная локальными краевыми эффектами, которые строго описываются только в рамках общей теории упругости.

С развитием вычислительной техники метод конечных элементов (МКЭ) стал стандартом инженерного анализа, позволяя моделировать сложную геометрию и граничные условия с высокой степенью детализации [3, 4]. В данной работе МКЭ выступает не только как инструмент самостоятельного расчёта, но и как средство верификации классических аналитических решений, а также для количественной оценки границ применимости формул сопротивления материалов.

В качестве расчетной схемы рассмотрены статически определимые балки различных типов закрепления (консоль, шарнирно-опертая) под действием разных видов внешних нагрузок (сосредоточенные моменты, распределенная нагрузка).

Геометрические параметры поперечного сечения балки унифицированы для всех расчетных случаев:

Форма сечения: прямоугольник.

Ширина сечения: b=2 см.

Высота сечения: h=10 см.

Длина балки: l=100 см.

Такое соотношение высоты к длине (h/l = 1/10) соответствует классической модели балки, где влияние поперечных деформаций относительно невелико, что позволяет ожидать хорошего совпадения результатов аналитического и численного методов.

Определение нормальных напряжений σ проводилось на основе классической формулы Навье для чистого изгиба [1]:

$$\sigma = \frac{M_X}{I_X} * y \qquad (1)$$

M_X – изгибающий момент в сечении;

I_X – осевой момент инерции относительно нейтральной оси x;

y – расстояние от нейтральной оси до точки, в которой определяется нормальное напряжение.

Для численного решения задачи использовался современный программный комплекс конечно-элементного анализа [3, 4]. Балка моделировалась с использованием пластинчатых конечных элементов, что позволяет корректно учесть работу сечения как тонкостенной конструкции и получить распределение напряжений по высоте и ширине.

Размер конечного элемента был принят равным 1 см (или условной единице сетки, соответствующей масштабу модели). Такой шаг сетки обеспечивает достаточную плотность разбиения (h = 10 см).

Напряжения по МКЭ определялись в центре конечных элементов. Соответственно аналитическим способом были найдены напряжения в точках, которые соответствуют геометрическим центрам конечных элементов в выбранном поперечном сечении балки (рис. 1).

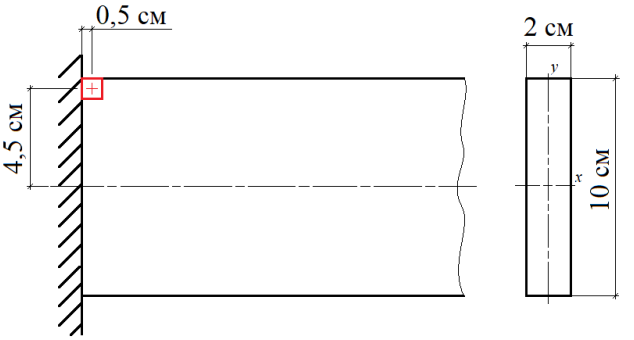


Рис. 1. К определению нормальных напряжений

Такой подход позволяет минимизировать погрешность, связанную с интерполяцией результатов МКЭ, и провести прямое послойное сравнение эпюр нормальных напряжений, полученных двумя независимыми методами. Это дает возможность выявить зоны, где гипотезы сопротивления материалов начинают давать погрешность (например, вблизи опор или точек

приложения сосредоточенных сил и моментов), и оценить величину этой погрешности в процентах.

Для обеспечения сопоставимости результатов во всех расчетных схемах интенсивность внешней нагрузки нормировалась по критерию максимальных нормальных напряжений. Величина нагрузки подбиралась таким образом, чтобы аналитически рассчитанное напряжение в центре крайнего конечного элемента составляло 2000 кг/см².

Пример 1. Рассмотрим шарнирно-опертую балку, загруженную двумя сосредоточенными моментами. Расчетная схема для аналитического метода показана на рис. 2. Расчетная схема по МКЭ показана на рис. 3.

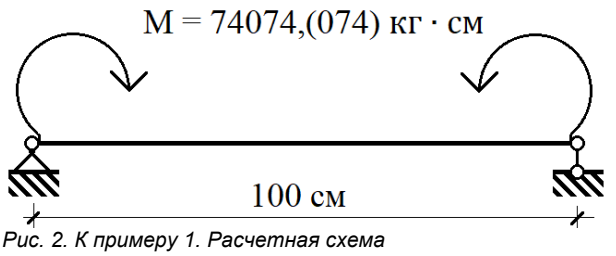


Рис. 2. К примеру 1. Расчетная схема

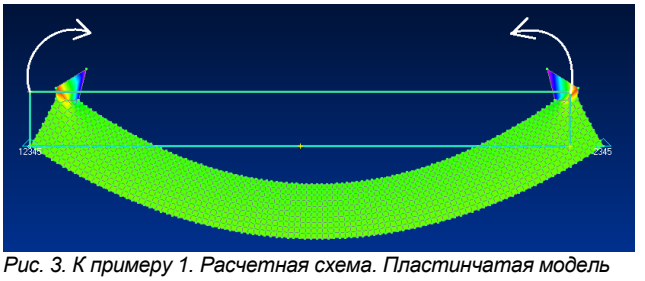


Рис. 3. К примеру 1. Расчетная схема. Пластинчатая модель

Все сечения балки испытывают чистый изгиб. Нормальные напряжения были найдены по формуле (1) и численным методом (МКЭ) по высоте поперечного сечения, расположенного в середине пролета балки. Выбор среднего сечения обусловлен необходимостью исключения влияния краевых эффектов от опор и точек приложения внешних нагрузок. Результаты сравнения аналитического и численного решений приведены в таблице 1.

Табл. 1
К примеру 1. Результат вычисления нормальных напряжений σ

y, см	σ, кг/см²		Расхождение, %
	Аналитический метод	МКЭ	
4,5	-2000	-2000	0
3,50	-1555,555	-1555,555	0
2,5	-1111,111	-1111,111	0
1,5	-666,666	-666,666	0
0,5	-222,222	-222,222	0
-0,5	222,222	222,222	0
-1,5	666,666	666,666	0
-2,5	1111,111	1111,111	0
-3,5	1555,555	1555,555	0
-4,5	2000	2000	0
Среднее расхождение, %			0

По полученным результатам построим эпюру распределения нормальных напряжений σ по высоте сечения (рис. 4).

Пример 2. Рассмотрим консоль, загруженную сосредоточенным моментом. Расчетная схема для аналитического метода показана на рис. 5. Расчетная схема по МКЭ показана на рис. 6.

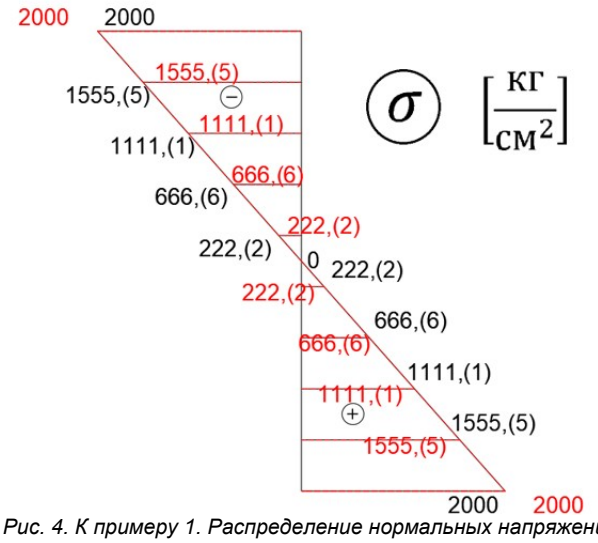


Рис. 4. К примеру 1. Распределение нормальных напряжений σ по высоте сечения: черный цвет – аналитический метод; красный цвет – МКЭ

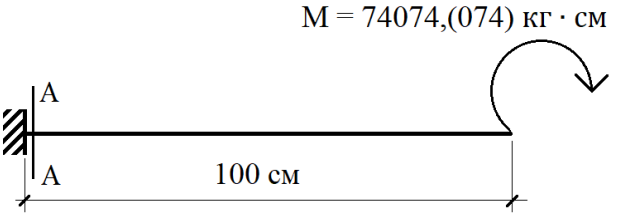


Рис. 5. К примеру 2. Расчетная схема

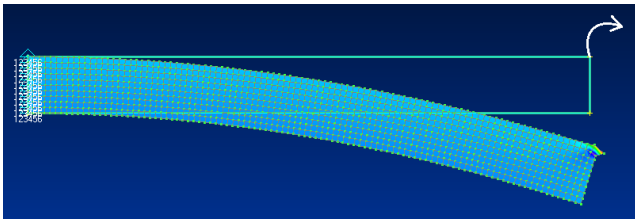


Рис. 6. К примеру 2. Расчетная схема. Пластинчатая модель

Как и в примере 1, все сечения балки находятся в состоянии чистого изгиба. Напряжения σ были найдены в сечении, расположенном непосредственно у жесткой заделки. Выбор такого положения сечения обусловлен необходимостью оценки влияния краевых эффектов, возникающих в зоне опорного закрепления. Результаты сравнения аналитического и численного решений приведены в таблице 2.

Табл. 2
К примеру 2. Результат вычисления нормальных напряжений σ

y, см	σ, кг/см²		Расхождение, %
	Аналитический метод	МКЭ	
4,5	2000	2062,7	3,385
3,50	1555,555	1510,9	2,871
2,5	1111,111	1074,0	3,340
1,5	666,666	641,3	3,805
0,5	222,222	213,6	3,880
-0,5	-222,222	-213,6	3,880
-1,5	-666,666	-641,3	3,805
-2,5	-1111,111	-1074,0	3,340
-3,5	-1555,555	-1510,9	2,871
-4,5	-2000	-2062,7	3,385
Среднее расхождение, %			3,5

По полученным результатам построим эпюру распределения нормальных напряжений σ по высоте сечения (рис. 7).

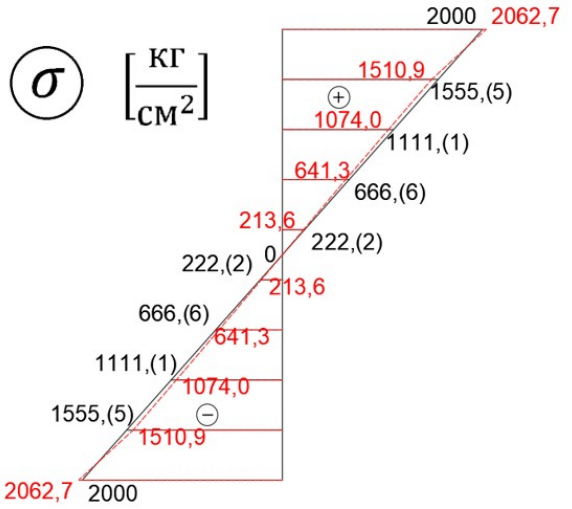


Рис. 7. К примеру 2. Распределение нормальных напряжений σ по высоте сечения: черный цвет – аналитический метод; красный цвет – МКЭ

Пример 3. Рассмотрим шарнирно-опертую балку, загруженную равномерно распределенной нагрузкой. Расчетная схема для аналитического метода показана на рис. 8. Расчетная схема по МКЭ показана на рис. 9.

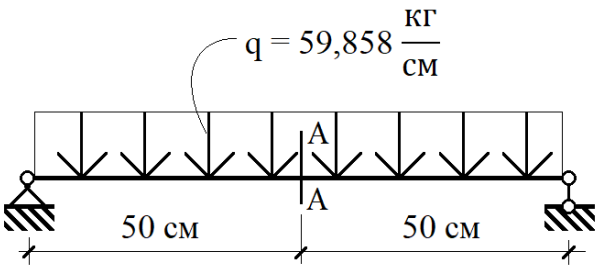


Рис. 8. К примеру 3. Расчетная схема

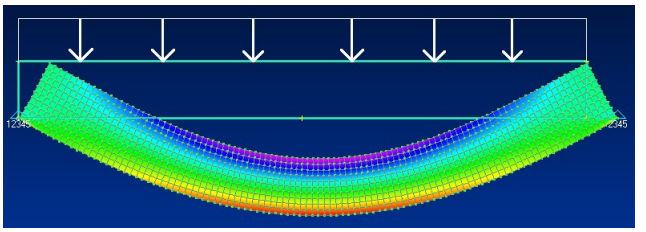


Рис. 9. К примеру 3. Расчетная схема. Пластинчатая модель

Балка нагружена таким образом, что практически все сечения испытывают поперечный изгиб. Однако в сечении А, расположенном посередине пролета балки (рис. 8), поперечная сила Q = 0, поэтому в этом сечении реализуется случай чистого изгиба. Определим нормальные напряжения σ в сечении А. Результаты сравнения аналитического и численного решений приведены в таблице 3.

Табл. 3
К примеру 3. Результат вычисления нормальных напряжений σ

y, см	σ, кг/см²		Расхождение, %
	Аналитический метод	МКЭ	
4,5	-2000	-2022,8	1,140
3,50	-1555,555	-1569,9	0,922
2,5	-1111,111	-1119,6	0,764
1,5	-666,666	-671,0	0,650
0,5	-222,222	-223,6	0,602
-0,5	222,222	223,6	0,602
-1,5	666,666	671,0	0,650
-2,5	1111,111	1119,6	0,764
-3,5	1555,555	1569,9	0,922
-4,5	2000	2022,8	1,140
Среднее расхождение, %			0,8

По полученным результатам построим эпюру распределения нормальных напряжений σ по высоте сечения (рис. 10).

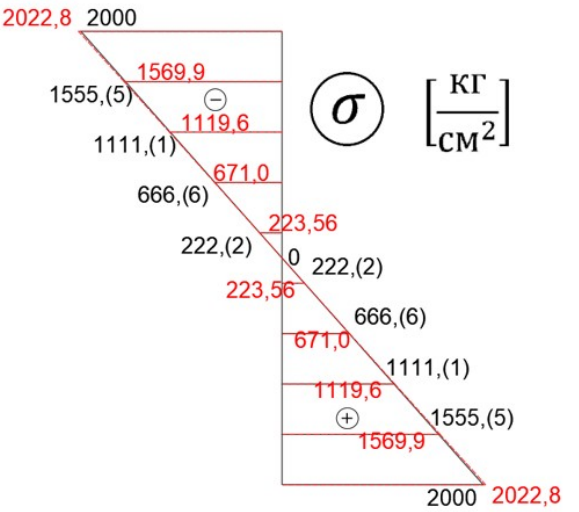


Рис. 10. К примеру 3. Распределение нормальных напряжений σ по высоте сечения: черный цвет – аналитический метод; красный цвет – МКЭ

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что в зоне чистого изгиба, удаленной от областей влияния краевых эффектов, формула Навье обеспечивает высокую точность определения нормальных напряжений σ. Вблизи зон приложения нагрузок и опорных закреплений наблюдается расхождение между аналитическим решением и результатами МКЭ, обусловленное локальным искажением эпюры нормальных напряжений. Это искажение связано с нарушением гипотезы плоских сечений в указанных зонах. В рассмотренных примерах максимальное относительное расхождение составило 3,5 %. Сравнение аналитического решения проводилось с решением, полученным методом конечных элементов (МКЭ) с использованием пластинчатых конечных элементов.

Литература

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П., Сопротивление материалов. В 2 частях. Ч. 1: учебник и практикум для вузов. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2026. – 293 с.
2. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П., Сопротивление материалов. В 2 частях. Ч. 2: учебник и практикум для вузов. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2026. – 273 с.
3. Косицын С. Б., Долотказин Д. Б. Расчет стержневых систем методом конечных элементов с использованием комплекса MSC.PATRAN-NASTRAN: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2010. – 68 с.
4. Шимкович Д. Г. Инженерный анализ методом конечных элементов. Femap & Nastran. М.: ДМК, 2008. – 701 с.

Determination of Normal Stresses in Beams under Pure Bending: A Comparison of Navier's Formula and the Finite Element Method

Alferov I.V., Eiduk A.B.
Russian University of Transport

JEL classification: L61, L74, R53

This paper presents a comparative analysis of the determination of normal stresses in beams under pure bending using an analytical method (Navier's formula) and the Finite Element Method (FEM). The study is conducted on statically determinate beams (simply supported and cantilever) with a rectangular cross-section. Particular attention is paid to assessing the influence of edge effects in the zones of support constraints and load application on the accuracy of engineering calculations.

Keywords: strength of materials, pure bending, Navier's formula, Finite Element Method (FEM), normal stresses, edge effects.

References

1. Aleksandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. *Strength of Materials*. In 2 parts. Part 1: Textbook and practical guide for higher education institutions. – 9th ed., revised and expanded. – Moscow: Yurayt, 2026. – 293 p.
2. Aleksandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. *Strength of Materials*. In 2 parts. Part 2: Textbook and practical guide for higher education institutions. – 9th ed., revised and expanded. – Moscow: Yurayt, 2026. – 273 p.
3. Kositsyn S. B., Dolotkazin D. B. *Analysis of Bar Systems by the Finite Element Method Using the MSC.PATRAN-NASTRAN Suite*: Study guide. – Moscow: MIIT, 2010. – 68 p.
4. Shimkovich D. G. *Engineering Analysis Using the Finite Element Method. Femap & Nastran*. Moscow: DMK, 2008. – 701 p.