Уточнение методики расчета упругих систем с односторонними связями и трением на основе пошагового анализа

Голых Олег Владимирович
канд. техн. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, volgate@mail.ru

Уточнение методики расчета упругих систем с односторонними связями, было получено на основе численных методов решения задач с трением Кулона. Построение решения производится посредством пошагового анализа процесса нагружения и изменения состояния контакта. Предложена рамно-стержневая модель контактного взаимодействия упругих систем с использованием контактных конечных элементов. На основе предложенных моделей и метода пошагового анализа, с учетом разработанного численного подхода, реализован алгоритм для расчета зданий с односторонними связями и трением на контакте.

Ключевые слова: контактные конечные элементы, контактное взаимодействие, рамно-стержневая модель, односторонние контактные задачи.

Постановка контактной задачи с односторонними связями для линейно-упругих тел

Рассмотрим два упруго деформируемых тела V^+ и V^- в двумерной области, контактирующие друг с другом в месте примыкания силовых деформационных швов к межэтажным перекрытиям. Пусть на части внешних границ, соответственно на S_g^+ и S_g^-, заданы граничные условия в усилиях, а на S_u^+ и S_u^- – граничные условия в перемещениях. При этом каждое из контактирующих тел, независимо от другого закреплено от смещения как жесткого целого. Граничные поверхности между телами обозначим соответственно через S_c^+ и S_c^- (рис. 1). Считается, что между S_c^+ и S_c^- имеется некоторый контактный слой – фиктивный (относительно очень малой толщины, не влияющей на результаты численного расчета) или действительно имеющий место в реальных условиях. Соответственно посредством недеформируемого фиктивного слоя моделируется жесткий контакт граничных поверхностей S_c^+ и S_c^- между собой, с помощью податливого контактного слоя можно моделировать взаимодействие неидеальных контактных поверхностей.

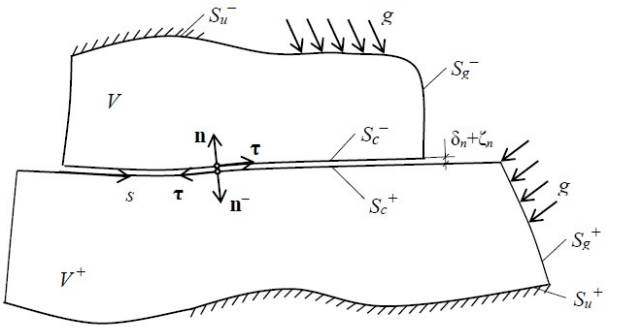


Рисунок 1 - Контактное взаимодействие упруго деформируемых тел

Свободную поверхность контактного слоя обозначим через S_c^*, начальную толщину слоя обозначим $\zeta_n^0(s)$, где s – координата вдоль S_c^+. Точки, принадлежащие поверхностям S_c^*, S_c^+ и S_c^-, местоположение которых определяется одним и тем же значением параметра s, будем называть противолежащими. Кроме того, совокупность указанных контактных поверхностей будем называть контактным швом (рис. 2).

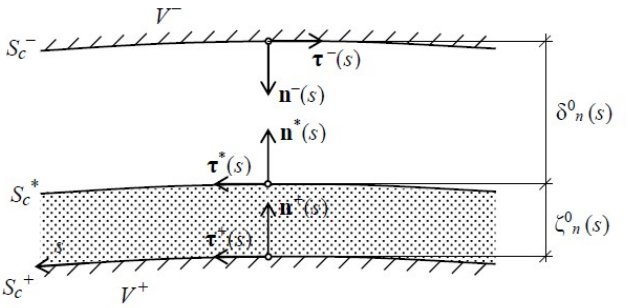


Рисунок 2 - Конфигурация контактного шва

Обозначим через $\mathbf{n}^*(s)$, $\mathbf{n}^+(s)$, $\mathbf{n}^-(s)$ – единичные вектора, нормальные соответственно к поверхностям S_c^*, S_c^+, S_c^- в противолежащих контактных точках. Здесь $\mathbf{n}(s)=(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2)$, где n_i – косинус угла между нормалью к соответствующей поверхности и i-й осью в декартовой системе координат. Введем также систему единичных векторов $\boldsymbol{\tau}^*(s)$, $\boldsymbol{\tau}^+(s)$, $\boldsymbol{\tau}^-(s)$ – касательных соответственно к граничным поверхностям S_c^*, S_c^+, S_c^- (и соответствующих единичным векторам-нормалям $\mathbf{n}^*(s)$, $\mathbf{n}^+(s)$, $\mathbf{n}^-(s)$). Здесь $\boldsymbol{\tau}(s)=(\tau_1, \tau_2)$, где τ_i – косинус угла между касательной к соответствующей поверхности и осью (i) в декартовой системе координат.

Обратившись к системе граничных условий [7], запишем соотношения, отвечающие кулоновскому трению (без учета отрыва контактных поверхностей, а также при недеформируемом контактном слое)

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ |\sigma_\tau| \le -f\,\sigma_n,\ \ \sigma_n < 0 \\ 2.\ \sigma_\tau\, u_\tau \le 0 \\ 3.\ (|\sigma_\tau| + f\sigma_n)\, u_\tau = 0 \end{array}\right\}\ \mathbf{x} \in S_c. \qquad (1)$$

Здесь σ_n, σ_τ – нормальное и касательное напряжения на площадке контакта; $f \ge 0$ – коэффициент трения Кулона; u_τ – взаимное смещение контактных поверхностей в направлении касательной. Первое из уравнений (1) выражает закон трения Кулона, второе и третье – устанавливают связь между проскальзыванием поверхностей контакта u_τ и направлением и величиной касательных напряжений σ_τ.

В области V, занимаемой упругими телами V^+ и V^-, выполняются обычные линейные соотношения теории упругости (в данном случае – в рамках плоской задачи), а на границах этих тел (несовпадающих с S_c^*, S_c^+, S_c^-) – соответствующие граничные условия: статические – на $S_g = S_g^+ \cup S_g^-$ и кинематические – на $S_u = S_u^+ \cup S_u^-$ [1, 2].

$$(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho} = 0, \quad \mathbf{x} \in V; \qquad (2)$$

$$\mathbf{Au} - (\mathbf{D})^{-1}\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \mathbf{x} \in V; \qquad (3)$$

$$(\mathbf{A}_S)^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}_S, \quad \mathbf{x} \in S_g; \qquad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \quad \mathbf{x} \in S_u, \qquad (5)$$

где $V = V^+ \cup V^-$; $\mathbf{x} = \{x_1\ x_2\}$ – точка на плоскости; $\boldsymbol{\rho} = \{X\ Y\}^T$ – вектор объемных сил; X, Y – компоненты вектора объемных сил в направлении осей $x(1)$, $y(2)$; $\mathbf{g}_S = \{X_n\ Y_n\}^T$ – вектор заданных поверхностных сил, $\mathbf{u}_S = \{u_{1S}\ u_{2S}\}^T$ – вектор заданных перемещений с компонентами в направлении осей координат; $\mathbf{D}$ – матрица упругости материала тела, в случае плоского напряженного состояния, например, равная

$$\mathbf{D} = 2G\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

G, ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона; $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_{12}\}^T$ – вектор напряжений; $\mathbf{u} = \{u_1\ u_2\}^T$ – вектор перемещений;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

– матрица операций дифференцирования; $\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}$ – **матрица направляющих косинусов n_x, n_y нормали n к поверхности S_g.**

Обратимся к описанию граничных условий на S_c^*, S_c^+, S_c^-. Считаем, что данные поверхности являются идеально гладкими. Пусть $\mathbf{u}^*(s)$, $\mathbf{u}^+(s)$, $\mathbf{u}^-(s)$ – вектора перемещений точек на поверхностях S_c^*, S_c^+, S_c^- соответственно, $\boldsymbol{\sigma}^*(s)$, $\boldsymbol{\sigma}^-(s)$ – вектор компонент напряжений, действующих на поверхностях S_c^*, S_c^-.

Рассмотрим граничные условия для односторонних связей при учете сил трения, действующих между поверхностями контактирующих тел. Предполагается, что зависимость данных сил трения от внешних факторов сводится в большинстве случаев к закону Кулона, описываемому условием

$$|\sigma_\tau| \le -f\sigma_n, \qquad (6)$$

где σ_n, σ_τ – соответственно нормальные и касательные напряжения на контакте, при этом $\sigma_n \le 0$; $f \ge 0$ – коэффициент трения Кулона, который зависит от материала и характера соприкасающихся поверхностей. Таким образом, закон Кулона устанавливает предельные величины касательных контактных напряжений в зависимости от величин нормальных напряжений.

То, что односторонние связи с трением являются неидеальными, упругие системы в этом случае не обладают свойствами консервативности, а решение зависит от последовательности приложения нагрузок, широко известные факты. Кроме того, наличие трения приводит к появлению дополнительных свойств, не имеющих место для такой же упругой системы, но без учета трения. В частности, это явление возможной потери устойчивости решения при критических значениях коэффициента трения, эффект регуляризации задачи с трением при наличии податливого поверхностного слоя между контактирующими поверхностями и другое.

К тому же в реальных сооружениях могут иметь место более сложные условия контактного трения, чем это определяется условием в виде (6). Так, коэффициент трения f может быть функцией от нормального контактного давления σ_n; контактный шов может обладать определенной податливостью и начальной прочностью. Кроме того, возможное разрушение материала шва приводит, по сути, к изменению коэффициента трения и величины зазора; при взаимодействии сооружения с грунтовым основанием следует учитывать удельное сцепление грунта и т. п.

Сформулируем граничные условия для задачи с односторонними связями и трением Кулона при наличии деформируемого слоя между контактирующими поверхностями. В случае отсутствия реального контактного слоя, последний принимается «нулевым» («фиктивным») – относительно очень малой толщины, но имеющим сравнительно большую жесткость, и не влияющим на результаты численного расчета. Зададимся пока линейной зависимостью обжатия и сдвига контактного слоя при его деформировании:

$$u_n^c(s) = \rho_n(s)\,\sigma_n(s) \le 0; \quad u_\tau^c(s) = \rho_\tau(s)\,\sigma_\tau(s), \qquad (7)$$

где $\rho_n(s)$, $\rho_\tau(s)$ – коэффициенты податливости слоя; $\sigma_n(s) \le 0$, $\sigma_\tau(s)$ – контактные напряжения в слое. Взаимные смещения контактных поверхностей S_c^+, S_c^- в направлении нормали и касательной:

$$u_n(s) = u_n^+(s) - u_n^-(s); \quad u_\tau(s) = u_\tau^+(s) - u_\tau^-(s), \qquad (8)$$

где $u_n^+(s) = (\mathbf{n}(s))^T \mathbf{u}^+(s)$, $u_n^-(s) = (\mathbf{n}(s))^T \mathbf{u}^-(s)$, $u_\tau^+(s) = (\boldsymbol{\tau}(s))^T \mathbf{u}^+(s)$, $u_\tau^-(s) = (\boldsymbol{\tau}(s))^T \mathbf{u}^-(s)$; $\boldsymbol{\sigma}^*(s) = \boldsymbol{\sigma}^+(s)$, $\boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{\tau}^+(s) = -\boldsymbol{\tau}^-(s)$. Взаимное перемещение $u_n(s)$ считается положительным, если при деформировании тел противолежащие точки на S_c^+, S_c^- сближаются в направлении нормалей к данным поверхностям и отрицательно – если они удаляются друг от друга. Взаимное перемещение $u_\tau(s)$ считается положительным, если противолежащие точки на S_c^+, S_c^- отдаляются друг от друга в касательном направлении, и отрицательным – если они сближаются.

Рассмотрим возможные случаи контакта поверхностей S_c^* и S_c^- в произвольной точке. При соблюдении в этой точке условия $|\sigma_\tau| < -f\sigma_n$ данные поверхности находятся в состоянии сцепления друг с другом (допредельного трения). Так как проскальзывания не происходит, то взаимное касательное смещение противолежащих точек, определяемое по (8), будет равно нулю, т. е. $u_\tau + u_\tau^c = 0$ при любом значении σ_τ. Если же в точке $|\sigma_\tau| = -f\sigma_n$ (что соответствует предельному трению), то происходит проскальзывание поверхностей S_c^* и S_c^- относительно друг друга, т. е. $u_\tau + u_\tau^c \ne 0$. При этом направление действия касательных напряжений σ_τ и направление взаимного смещения $(u_\tau + u_\tau^c)$ будут противоположны, поскольку напряжения трения сопротивляются относительному перемещению контактных поверхностей S_c^* и S_c^- в касательном направлении.

В итоге полная система граничных условий для задачи с односторонними связями и трением Кулона при наличии упруго-деформируемого слоя между контактирующими поверхностями будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} u_n(s) + u_n^c(s) \le \delta_n^0(s) \\ \sigma_n(s) = \sigma_n^+(s) = \sigma_n^-(s) = \sigma_n^*(s) \le 0 \\ [u_n(s) + u_n^c(s) - \delta_n^0(s)]\,\sigma_n(s) = 0 \\ \sigma_\tau(s) = \sigma_\tau^+(s) = \sigma_\tau^-(s) = \sigma_\tau^*(s) \\ |\sigma_\tau(s)| \le -f(s)\,\sigma_n(s) \\ \sigma_\tau(s)\,[u_\tau(s) + u_\tau^c(s)] \le 0 \\ [|\sigma_\tau(s)| + f\,\sigma_n(s)]\,[u_\tau(s) + u_\tau^c(s)] = 0 \\ u_n^c(s) = \rho_n(s)\,\sigma_n(s) \\ u_\tau^c(s) = \rho_\tau(s)\,\sigma_\tau(s) \end{array}\right\}\ \mathbf{x} \in S_c^+,\ S_c^-,\ S_c^* \qquad (9)$$

Отметим, что условия (9) справедливы не только в случае простого загружения, но и гораздо более широком классе процессов нагружения, основной характерной чертой которых является монотонность. Таким образом, определение напряженно-деформированного состояния взаимодействующих тел будет состоять в отыскании распределения перемещений, деформаций, напряжений в области V и на внешних границах S_g, S_u, а также распределения взаимных смещений $u_n(s)$, $u_n^c(s)$, $u_\tau(s)$, $u_\tau^c(s)$ и контактных

напряжений $\sigma_n(s)$, $\sigma_\tau(s)$ на граничных поверхностях S_c^*, S_c^+, S_c^-, удовлетворяющих соотношениям (2)–(5) и (9).

Приведенные выше постановки возьмем за основу для уточнения принятых ранее жесткостей ККЭ, по средствам построения численных методов решения задач с трением Кулона как в случае двухстороннего, так и одностороннего контакта. В том числе рассматривается решение контактных задач с изменяющимися в процессе нагружения предельными силами трения. Предполагается активное нагружение, когда имеет место пропорциональное и монотонное изменение всех внешних воздействий от нуля до своих окончательных значений (т. е. процесс загружения в этом случае близок к простому, без учета истории нагружения). Отметим, что даже при таком предположении решение контактных задач с односторонними связями и наличием трения представляет собой достаточно сложную проблему. В частности, поставить такую задачу в вариационной форме, как и получить ее строгое и полное математическое обоснование, за исключением частных случаев [8, 9], пока не удается.

Уточнение методики расчета упругих систем с односторонними связями и трением на основе пошагового анализа

В данном разделе для уточнения методики расчета зданий с силовыми деформационными швами приводится общий алгоритм расчета упругих систем с односторонними связями и трением Кулона, в котором используются рассмотренные вычислительные схемы. Основные положения, на которых строится общий алгоритм, также аналогичны тем, что были приведены ранее. Моделируется пошаговый процесс нагружения, в котором шаги назначаются путем анализа состояния контакта на пробном шаге. Состояния контакта, в свою очередь, определяются зонами отрыва, сцепления и проскальзывания контактирующих между собой поверхностей. Основной шаг, выполняемый как перерасчет пробного шага, фиксирует изменение состояния контакта, таким образом, меняется текущая рабочая силовых деформационных швов в месте примыкания к межэтажным перекрытиям.

Для моделирования односторонних связей с трением Кулона используем рамно-стержневые контактные элементы. Изменение состояния (включение или выключение односторонней связи, сцепление либо проскальзывание контактных поверхностей) осуществляется посредством пошагового изменения жесткостных свойств дискретного контактного слоя (жесткостей отдельных стержней рамного ККЭ). Так, состояние контакта в направлении нормали моделируется продольной жесткостью опорного стержня ККЭ (нормального к контактным поверхностям). При включенной односторонней связи продольная жесткость стержня назначается соответствующей жесткости контактного слоя в направлении нормали. Соответственно, при жестком контакте опорный стержень принимается абсолютно жестким. Состояние отрыва (выключенной связи) моделируется заданием нулевой продольной жесткости опорного стержня. Состояние сцепления-скольжения по касательной моделируется изгибной жесткостью опорного стержня. При сцеплении изгибная жесткость стержня соответствует касательной жесткости контактного слоя. Состояние скольжения моделируется заданием нулевой изгибной жесткости опорного стержня ККЭ.

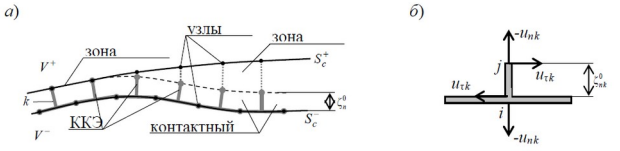


Рисунок 3 - Схема контактного взаимодействия при односторонних связях с трением Кулона

Рассмотрим статическую контактную задачу для линейно-деформируемых краев перекрытий в зоне силовых деформационных швов, между которыми существуют односторонние неидеальные (т. е. с учетом трения) связи. Граничные условия в терминах усилий и перемещений для k-го ККЭ (рис. 3) имеют здесь следующий вид (без учета податливости связей):

$$\left.\begin{array}{l} u_{nk} \le \delta_{nk}^0, \quad N_k \le 0, \quad (u_{nk} - \delta_{nk}^0) N_k = 0 \\ |Q_k| \le |Q_{pk}|, \quad Q_k\, u_{\tau k} \ge 0, \quad (Q_k - Q_{pk})\, u_{\tau k} = 0 \end{array}\right\} \quad k \in S_c. \tag{10}$$

Условия взаимодействия на контакте формулируем через смещения и усилия в ККЭ. При $u_{nk} < \delta_k^0$, $N_k = 0$ – имеет место состояние отрыва. При $u_{nk} = \delta_k^0$, $N_k < 0$, $|Q_k| < |Q_{pk}|$, $u_{\tau k} = 0$ – состояние сцепления (допредельного трения). При $u_{nk} = \delta_k^0$, $N_k < 0$, $|Q_k| = |Q_{pk}|$, $u_{\tau k} \ne 0$ – состояние контакта со скольжением (предельного трения). Момент перехода от одного состояния к другому представляет собой соответственно событие выключения, включения односторонней связи, проскальзывания или зацепления.

Пусть в конце s-го шага нагружения, при уровне нагружения λ^s (принятого за исходный), состояние на контакте $S_c = S_c^+ \cup S_c^-$ известно. Для каждой k-й дискретной связи (т. е. k-го ККЭ, $k \in S_c$) определены значения взаимных смещений u_{nk}^s, $u_{\tau k}^s$ и контактных усилий N_k^s, Q_k^s. Будем считать, что на данный момент часть связей ($k \in S_{1c}$, $S_{1c} = S_{1c}^+ \cup S_{1c}^-$) находится в состоянии сцепления, другая часть ($k \in S_{2c}$, $S_{2c} = S_{2c}^+ \cup S_{2c}^-$) – в состоянии контакта со скольжением, и, наконец, третья часть связей ($k \in S_{3c}$, $S_{3c} = S_{3c}^+ \cup S_{3c}^-$) – в состоянии отрыва. При этом $S_c = S_{1c} \cup S_{2c} \cup S_{3c}$.

В начале расчета (т. е. при нулевом уровне нагружения) условия на контакте устанавливаются согласно заданной расчетной схеме, например, для всех связей задается состояние контакта со сцеплением.

1. Выполняется (s+1)-й пробный шаг нагружения с параметром $\Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}$. Для каждого k-го ККЭ определяются приращения взаимных перемещений и контактных усилий: $\Delta\widetilde{u}_{nk}^{s+1}$, $\Delta\widetilde{u}_{\tau k}^{s+1}$, $\Delta\widetilde{N}_k^{s+1}$, $\Delta\widetilde{Q}_k^{s+1}$, а также приращение предельной поперечной силы

$$\Delta\widetilde{Q}_{pk}^{s+1} = sign(\Delta\widetilde{Q}_k^{s+1}) \cdot f_k \left|\Delta\widetilde{N}_k^{s+1}\right|. \tag{11}$$

2. Для связей, находящихся в состоянии скольжения, проверяется возможность перехода их в состояние сцепления, что определяется сменой знака приращения касательного смещения на данном шаге $\Delta\widetilde{u}_{\tau k}^{s+1}$:

$$\left(\Delta\widetilde{u}_{\tau k}^{s+1} / \Delta u_{\tau k}^s\right) < 0, \quad \Delta u_{\tau k}^s \ne 0, \quad k \in S_{2c}. \tag{12}$$

Из связей, удовлетворяющих условию (12), выбирается та, для которой имеет место наибольшее по модулю относительное приращение касательных перемещений. Для этой связи устанавливается состояние сцепления и повторно выполняется (s+1)-й пробный шаг, т. е. следует переход к п. 1.

3. Кроме того, для связей в состоянии скольжения анализируется характер изменения предельных сил трения на контакте. Так, если приращение предельной силы трения для k-й связи превысит приращение поперечной силы в k-м ККЭ (в относительных величинах):

$$\frac{\left|\widetilde{Q}_{pk}^{s+1}\right| - \left|Q_{pk}^s\right|}{\Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}} > \frac{\left|Q_k^s\right| - \left|Q_k^{s-1}\right|}{\Delta\lambda^s}, \quad k \in S_{2c}, \tag{13}$$

то следует вернуться к состоянию сцепления для этой связи и повторить (s+1)-й пробный шаг нагружения (переход к п. 1).

4. В предположении линейного деформирования системы от исходного уровня λ^s до момента наступления очередного события на контакте для каждой k-й связи определяется величина требуемого для этого шага:

– момент проскальзывания для k-й связи, находящейся в состоянии сцепления:

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}\left(\frac{Q_{pk}^s - Q_k^s}{\Delta\widetilde{Q}_k^{s+1} - \Delta\widetilde{Q}_{pk}^{s+1}}\right), \quad k \in S_{1c}; \tag{14}$$

– момент отрыва (т. е. выключения) для k-й односторонней связи, находящейся до этого в состоянии контакта (включенной связи):

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}\left(\frac{-N_k^s}{\Delta\widetilde{N}_k^{s+1}}\right), \quad k \in S_{1c},\ S_{2c}; \tag{15}$$

– момент контакта (т. е. включения) k-й односторонней связи, находящейся до этого в состоянии отрыва (выключенной связи):

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}\left(\frac{\delta_{nk}^0 - u_{nk}^s}{\Delta\widetilde{u}_{nk}^{s+1}}\right), \quad k \in S_{3c}. \tag{16}$$

5. Из всех значений $\Delta\lambda_k^s$, найденных с помощью (14)–(16), выбирается наименьшее, соответствует наступлению ближайшего события на контакте:

$$\Delta\lambda_C^{s+1} = \min(\Delta\lambda_k^{s+1}), \quad k \in S_{1c},\ S_{2c},\ S_{3c}. \tag{17}$$

Проверяется ограничение сверху: $\lambda^s + \Delta\lambda_C^{s+1} \le 1$. Если данное условие нарушается, то принимается $\Delta\lambda_C^{s+1} = 1 - \lambda^s$.

6. В случае, если на пробном шаге предельные силы трения для всех связей, находящихся в состоянии скольжения, постоянны (т. е. $\Delta\widetilde{Q}_{pk}^{s+1} = 0$, $k \in S_{2c}$) или зона проскальзывания отсутствует ($S_{2c} = 0$), то перерасчет шага не производится. В этом случае перемещения и усилия для уточненного основного шага $\Delta\lambda^{s+1} = \Delta\lambda_C^{s+1}$ определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u_{nk}^{s+1} &= u_{nk}^s + \Delta u_{nk}^{s+1}, & \Delta u_{nk}^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1} / \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1})\, \Delta\widetilde{u}_{nk}^{s+1}; \\ u_{\tau k}^{s+1} &= u_{\tau k}^s + \Delta u_{\tau k}^{s+1}, & \Delta u_{\tau k}^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1} / \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1})\, \Delta\widetilde{u}_{\tau k}^{s+1}; \\ N_k^{s+1} &= N_k^s + \Delta N_k^{s+1}, & \Delta N_k^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1} / \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1})\, \widetilde{N}_k^{s+1}; \\ Q_k^{s+1} &= Q_k^s + \Delta Q_k^{s+1}, & \Delta Q_k^{s+1} &= (\Delta\lambda^{s+1} / \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1})\, \widetilde{Q}_k^{s+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Далее следует переход к п. 9.

7. В случае, если предельные силы трения (хотя бы для одной связи на S_{2c}) изменяются, т. е. $\Delta\widetilde{Q}_{pk}^{s+1} \ne 0$, $k \in S_{2c}$, а также выполняется условие

$$\frac{\left|\widetilde{Q}_{pk}^{s+1}\right|-\left|Q_{pk}^{s}\right|}{\Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}} \le \frac{\left|Q_{k}^{s}\right|-\left|Q_{k}^{s-1}\right|}{\Delta\lambda^{s}}, \quad k \in S_{2c}, \qquad (19)$$

то необходимо произвести перерасчет шага с уточненным параметром $\Delta\lambda^{s+1}$, который, в свою очередь, принимается равным минимальному из значений:

$$\Delta\lambda^{s+1} = \min\left(\Delta\lambda_{\mathrm{C}}^{s+1}, \Delta\lambda_{\mathrm{P}}^{s+1}\right), \qquad (20)$$

где $\Delta\lambda_{\mathrm{P}}^{s+1} = \min\left(\Delta\lambda_{k}^{s+1}\right)$; $\Delta\lambda_{k}^{s+1} = \Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}\left|\varepsilon_p\ Q_{pk}^{s} / \Delta\widetilde{Q}_{pk}^{s+1}\right|$ при $\Delta\widetilde{Q}_{pk}^{s+1} \neq 0$, иначе $\Delta\lambda_{k}^{s+1} = \Delta\lambda_{\max}$, $k \in S_{2c}$; ε_p – заданная относительная точность вычислений; $\Delta\lambda_{\max}$ – заданный максимальный шаг нагружения.

Перед перерасчетом шага производится корректировка поперечной силы в k-м ККЭ (при сохранении состояния скольжения на данном контакте):

$$Q_{k}^{s+1} = Q_{k}^{s} + \Delta Q_{ck}^{s+1}, \quad \Delta Q_{ck}^{s+1} = \Delta Q_{pk}^{s+1} + \delta Q_{k}^{s}, \quad k \in S_{2c}, \qquad (21)$$

а к противолежащим узлам контактных поверхностей прикладываются компенсирующие силы F_{ck}^{s+1}, равные ΔQ_{ck}^{s+1}, но с противоположным знаком:

$$F_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{pk}^{s+1} - \delta Q_{k}^{s}, \quad k \in S_{2c}. \qquad (22)$$

Здесь $\Delta Q_{pk}^{s+1} = \dfrac{\Delta\lambda^{s+1}}{\Delta\widetilde{\lambda}^{s+1}}\Delta\widetilde{Q}_{pk}^{s+1}$ – приращение предельной поперечной силы на основном шаге $\Delta\lambda^{s+1}$; $\delta Q_{k}^{s} = Q_{pk}^{s} - Q_{k}^{s}$ – невязка поперечных сил, образующаяся на предыдущем шаге.

8. В результате перерасчета системы с шагом $\Delta\lambda^{s+1}$ определяются приращения взаимных смещений и контактных усилий Δu_{nk}^{s+1}, $\Delta u_{\tau k}^{s+1}$, ΔQ_{k}^{s+1}, ΔN_{k}^{s+1}, конечные значения смещений и усилий для уточненного основного шага $\Delta\lambda^{s+1}$:

$$u_{nk}^{s+1} = u_{nk}^{s} + \Delta u_{nk}^{s+1}; \quad u_{\tau k}^{s+1} = u_{\tau k}^{s} + \Delta u_{\tau k}^{s+1};$$
$$Q_{k}^{s+1} = Q_{k}^{s} + \Delta Q_{k}^{s+1}; \quad N_{k}^{s+1} = N_{k}^{s} + \Delta N_{k}^{s+1}, \qquad (23)$$

а также значения предельной поперечной силы для каждого контакта:

$$Q_{pk}^{s+1} = sign\left(\Delta Q_{k}^{s+1}\right)\cdot f_k \left|N_{k}^{s+1}\right|. \qquad (24)$$

9. Проверяются условия наступления ожидаемого события:

– при наступлении события проскальзывания: $\left|\left(Q_{pk}^{s+1} - Q_{k}^{s+1}\right)/Q_{pk}^{s+1}\right| \le \varepsilon_Q,\ k \in S_{1c}$;

– в случае наступления события отрыва: $\left|N_{k}^{s+1}/N_{k\max}\right| \le \varepsilon_N,\ k \in S_{1c}, S_{2c}$;

– в случае наступления события контакта $\left|\left(u_{nk}^{s+1} - \delta_{nk}^{0}\right)/\zeta_{nk}^{0}\right| \le \varepsilon_u,\ k \in S_{3c}$.

Если соответствующее условие (с учетом заданной точности вычислений ε_Q, ε_N или ε_u) не срабатывает, то выполненный основной шаг засчитывается как пробный, т. е. принимаем $\Delta\widetilde{\lambda}^{s+1} = \Delta\lambda^{s+1}$. Следует повторное уточнение основного шага, начиная с п. 2.

При подтверждении наступления ожидаемого события – для данной связи устанавливается новое состояние, тем самым меняется рабочая схема сооружения. Пересчитанный основной шаг считается завершенным, а его результаты – окончательными для (s +1)-го уровня нагружения.

10. Устанавливается исходный уровень $\lambda^{s+1} = \lambda^{s} + \Delta\lambda^{s+1}$ для следующего шага нагружения. Если $\lambda^{s+1} < 1$, то цикл пошагового расчета повторяется, начиная с п. 1. Если же $\lambda^{s+1} = 1$, то следует завершение пошагового процесса. Выполняется уточнение принятых ранее жесткостей рамных ККЭ, используемые для расчетных моделей контакта высотных зданий с силовыми деформационными швами при помощью прямого метода конечных элементов (ПМКЭ).

В случае продолжения пошагового расчета для назначения параметра следующего пробного шага $\Delta\widetilde{\lambda}^{s+2}$ используются выражения, аналогичные (17)–(20). Принимается наименьшее из значений $\Delta\widetilde{\lambda}_{k}^{s+2}$, полученных для каждой k-й связи $\Delta\widetilde{\lambda}^{s+2} = \min\left(\Delta\widetilde{\lambda}_{k}^{s+2}\right)$. Если $\lambda^{s+1} + \Delta\widetilde{\lambda}^{s+2} > 1$, то принимается $\Delta\widetilde{\lambda}^{s+2} = 1 - \lambda^{s+1}$.

Блок-схема уточнения методики расчета упругой системы с учетом односторонних связей и трения Кулона представлена на рис. 4.

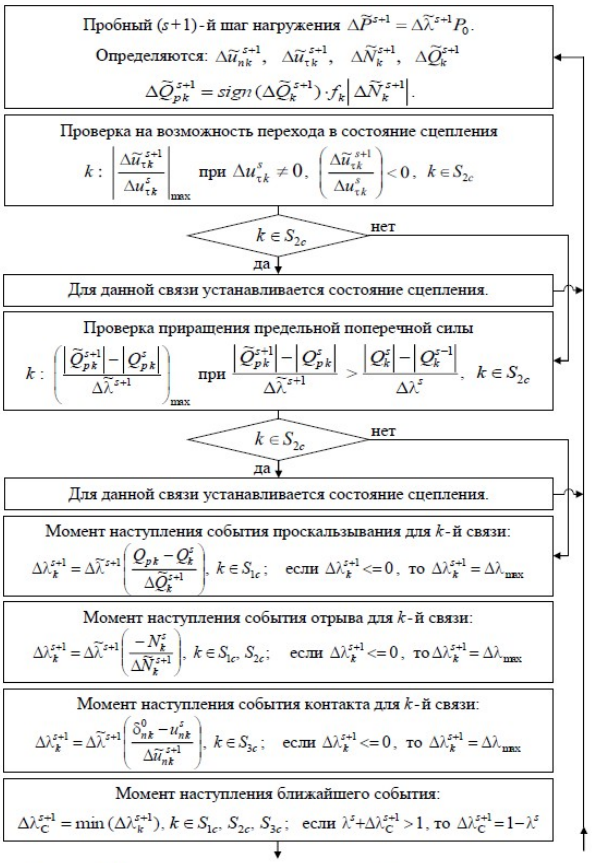


Рисунок 4 – Уточнение методики расчета упругой системы с учетом односторонних связей и трения Кулона

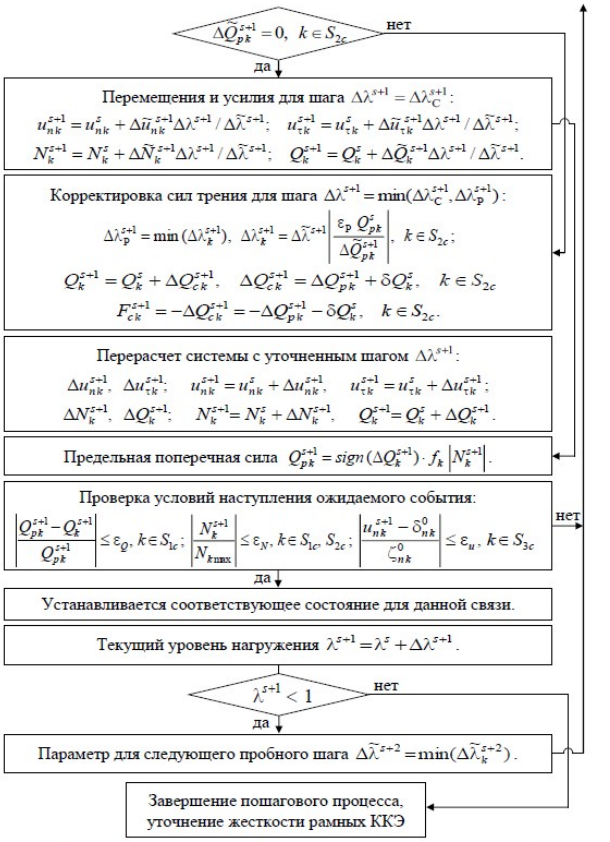


Рисунок 4, продолжение – Уточнение методики расчета упругой системы с учетом односторонних связей и трения Кулона

Литература

1. *Вовкушевский, А. В.* Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов / А. В. Вовкушевский, Б. А. Шойхет // – М.: Энергоиздат, – 1981. – 136 с.
2. *Вовкушевский, А. В.* Разработка методов расчета сооружений с учетом сложных контактных взаимодействий / А. В. Вовкушевский, Л. А. Розин, В. А. Рукавишников // Изв. вузов. Строительство. – 1994. – № 12. – С. 25–29.
3. *Зернин, М. В.* Моделирование контактного взаимодействия с использованием механики «контактной псевдосреды» / М. В. Зернин, А. П. Бабин, А. В. Мишин, В. Ю. Бурак // Прочность и надежность машин. Вестник БГТУ. – 2007. – № 4 (16). – С. 62–72.
4. *Подгорный, А. Н.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А. Н. Подгорный, П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач [и др.] // Киев: Наукова думка, – 1989. – 232 с.
5. *Люминарский, И. Е.* Расчет упругих систем с односторонними связями / И. Е. Люминарский. – М.: Изд-во МГИУ, – 2006. – 308 с.
6. *Лукашевич, А. А.* Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач / А. А. Лукашевич // Изв. вузов. Строительство. – 2007. – № 12. – С. 18–23.
7. *Лукашевич, А. А.* Решение контактных упругих задач с трением Кулона при пошаговом нагружении / А. А. Лукашевич // Изв. вузов. Строительство. – 2008. – № 10. – С. 14–21.
8. *Кравчук, А. С.* Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития / А. С. Кравчук // Прикладная математика и механика. – 2009. – № 3. – С. 492–502.
9. *Панагиотопулос, П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос // М.: Мир, – 1989. – 494 с.

Refinement of the methodology for calculating elastic systems with unilateral constraints and friction based on a step-by-step analysis.

Golyh O.V.
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering

JEL classification: C10, C50, C60, C61, C80, C87, C90

The refinement of the methodology for calculating elastic systems with unilateral constraints was obtained based on numerical methods for solving problems involving Coulomb friction. The solution is constructed through a step-by-step analysis of the loading process and changes in the contact state. A frame-and-rod model of the contact interaction of elastic systems using contact finite elements is proposed. Based on the proposed models and the step-by-step analysis method, and taking into account the developed numerical approach, an algorithm has been implemented for calculating buildings with unilateral constraints and contact friction.

Keywords: contact end elements, contact interaction, frame-core model, unilateral contact tasks.

References

1. Vovkushevsky, A. V. Analysis of massive hydraulic structures accounting for joint opening / A. V. Vovkushevsky, B. A. Shoikhet // – Moscow: Energoizdat, – 1981. – 136 p.
2. Vovkushevsky, A. V. Development of analysis methods for structures accounting for complex contact interactions / A. V. Vovkushevsky, L. A. Rozin, V. A. Rukavishnikov // Izvestiya Vuzov. Stroitelstvo. – 1994. – No. 12. – P. 25–29.
3. Zernin, M. V. Modeling contact interaction using "contact pseudo-medium" mechanics / M. V. Zernin, A. P. Babin, A. V. Mishin, V. Yu. Burak // Strength and Reliability of Machines. Bulletin of BSTU. – 2007. – No. 4 (16). – P. 62–72.
4. Podgorny, A. N. Contact interaction problems for structural elements / A. N. Podgorny, P. P. Gontarovsky, B. N. Kirkach [et al.] // Kyiv: Naukova Dumka, – 1989. – 232 p.
5. Lyuminarsky, I. E. Analysis of elastic systems with unilateral constraints / I. E. Lyuminarsky. – Moscow: MGIU Publishing House, – 2006. – 308 p.
6. Lukashevich, A. A. Construction and implementation of direct finite element method schemes for solving contact problems / A. A. Lukashevich // Izvestiya Vuzov. Stroitelstvo. – 2007. – No. 12. – P. 18–23. 7. Lukashevich, A. A. Solution of elastic contact problems with Coulomb friction under incremental loading / A. A. Lukashevich // Izvestiya Vuzov. Stroitelstvo. – 2008. – No. 10. – P. 14–21.
8. Kravchuk, A. S. Variational method in contact problems: state of the art and directions of development / A. S. Kravchuk // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – No. 3. – P. 492–502.
9. Panagiotopoulos, P. Inequalities in Mechanics and Their Applications: Convex and Nonconvex Energy Functions / P. Panagiotopoulos // Moscow: Mir, – 1989. – 494 p.